THÉORIE DE LA MESURE ET INTÉGRATION
EXERCICES – semaine 1&2

Les exercices marqués par le symbole ☠ sont plus difficiles.

Exercice 1.
Montrer qu'un singleton $\{x\} \subset \mathbb{R}$ est Jordan-mesurable, mais que $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ ne l'est pas.

Exercice 2.
Plaçons-nous sur $\mathbb{R}$. Soit $\mathcal{I} = \{(-\infty, a) :\ a \in \mathbb{Q}\}$. Que vaut $\sigma(\mathcal{I})$?

Exercice 3.
Soit E un espace quelconque. Quelle est la tribu engendrée par l'ensemble des singletons de E ?

Exercice 4.
Soit $(E, \mathcal{E}, \mu)$ un espace mesuré. Montrer que pour $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{E}$ de mesures finies,

$$\mu\Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\Big) = \sum_{\substack{I \subset \{1,\dots,n\} \\ I \neq \emptyset}} (-1)^{|I|+1} \mu\Big(\bigcap_{k \in I} A_k\Big).$$

Indication: procéder par récurrence.

Exercice 5.
Observons que $\mathbb{R}^2$ a une topologie canonique et donc une tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. D'autre part $\mathbb{R}^2$ est le produit $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, et donc a une tribu produit. Montrer que

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

Généraliser cela à $\mathbb{R}^d$.

Exercice 6.
Soit $\mathcal{M}$ une classe monotone stable par intersections finies. Montrer que $\mathcal{M}$ est une tribu.

Exercice 7.
Soient E un ensemble et $\mathcal{M}$ un classe monotone sur E. Montrer que $\mathcal{M}$ est stable par union disjointe finie, à savoir que si $A, B \in \mathcal{M}$ sont tels que $A \cap B = \emptyset$, alors $A \sqcup B \in \mathcal{M}$.
Conclure que $\mathcal{M}$ est stable aussi par union disjointe dénombrable.

Exercice 8.
Soit E un ensemble fini, avec $|E|$ pair. Posons $\mathcal{M} = \{A \subset E :\ |A| \text{ pair}\}$. Montrer que $\mathcal{M}$ est une classe monotone mais pas une tribu.

Exercice 9.
Soit E un ensemble. Pour $A \subset E$ posons

$$\mu(A) = \begin{cases} |A| & \text{si } A \text{ est fini,} \\ \infty & \text{si } A \text{ est infini,} \end{cases}$$

Montrer que μ est une mesure sur $(E, \mathcal{P}(E))$. On l'appelle désormais la mesure de comptage est on la note $|.|$.

Exercice 10.
Soit E un ensemble. Pour $A \subset E$ posons

$$\mu(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } A \text{ est fini,} \\ \infty & \text{si } A \text{ est infini,} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \nu(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } A \text{ est fini ou dénombrable,} \\ \infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Est-ce que μ et ν sont des mesures sur $(E, \mathcal{P}(E))$?

Exercice 11.
Soit $(E, \mathcal{E}, \mu)$ un espace mesuré et $A \in \mathcal{E}$. Montrer que $\nu(B) := \mu(A \cap B)$ pour $B \in \mathcal{E}$ définie une mesure sur $(E, \mathcal{E})$. On l'appelle la restriction de μ à A.

Exercice 12.
Soient $(E, \mathcal{E})$ un espace mesurable, μ, ν deux mesures sur E et $\mathcal{A}$ une collection d'ensembles stable par intersections finies. Supposons que $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{E}$ et que, pour tout $A \in \mathcal{A}$, $\mu(A) = \nu(A)$.

(a) Supposons qu'il existe une suite $A_0 \subset A_1 \subset \dots$ dans $\mathcal{A}$ avec $\mu(A_k) < \infty$ pour tout $k \geq 0$ et telle que $E = \bigcup_{k \geq 0} A_k$. Montrer que $\mu = \nu$.

(b) ☠ Montrer par un contre-exemple que, sans les conditions de finitude (ou σ-finitude) d'avant, on peut avoir $\mu \neq \nu$.

Exercice 13.
Donner un exemple d'ensembles $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{E}$ avec $A_1 \supset A_2 \supset \dots$, $\mu(A_n) = \infty$ pour tout n, mais

$$\bigcap\!\!\!\!\downarrow_{n \geq 1} A_n = \emptyset.$$

Exercice 14.
Soient $(E, \mathcal{E})$ un espace mesurable, $(\mu_i)_{i \in \mathcal{I}}$ une famille de mesures sur $(E, \mathcal{E})$ et $(a_i)_{i \in \mathcal{I}} \in (0, +\infty)^{\mathcal{I}}$. Montrer que

$$\sum_{i \in \mathcal{I}} a_i \mu_i : \mathcal{E} \to [0, +\infty]$$
$$A \mapsto \sum_{i \in \mathcal{I}} a_i \mu_i(A)$$

est une mesure sur $(E, \mathcal{E})$.

Exercice 15.
Admettant l'existence d'une mesure λ sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ telle que $\lambda([a,b)) = b-a$ pour tout $a < b$, calculer $\lambda(\{x\})$ pour $x \in \mathbb{R}$. Déduire que $\lambda((a,b)) = \lambda([a,b)) = \lambda((a,b]) = \lambda([a,b]) = b-a$. Calculer $\lambda(\mathbb{Q})$ et $\lambda(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$.
(Argumenter aussi pourquoi $\{x\}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.)

Exercice 16.
Admettant l'existence d'une mesure λ sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ telle que $\lambda([a,b]) = b-a$ pour tout $a < b$, montrer que si $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ est tel que $\lambda(A) = 0$, alors A^c est dense dans $\mathbb{R}$.
Rappel: Un ensemble $E \subset \mathbb{R}$ est dit dense si pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $\epsilon > 0$, $]x-\epsilon, x+\epsilon[$ contient au moins un point de E.

Exercice 17 (☠). (a) Admettons l'existence de la mesure de Lebesgue λ sur $\mathbb{R}$. Fixons un entier $M \geq 1$ et posons

$$\mathcal{M} = \big\{ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : \lambda(B \cap [0,M]) \in \mathbb{N} \big\}.$$

Montrer que $\mathcal{M}$ est une classe monotone. Exhiber un borélien qui n'appartient pas à $\mathcal{M}$.

(b) Posons $\mathcal{A} = \{[a, a+1) \cup B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : a \in [0, M-1]$ et $B \cap [0,M) = \emptyset\}$. Montrer que $\mathcal{A} \in \mathcal{M}$ et que $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{B}$.
On a donc construit une classe monotone qui génère $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ mais n'y est pas égale.

(c) Posons $\mathcal{A}' = \{[a, a+1) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : a \in \mathbb{R}\}$. Que vaut $\sigma(\mathcal{A}')$? Quelle est la classe monotone engendrée par $\mathcal{A}'$?